Рассмотрена методика получения уравнений состояния по методу переменных для электрических цепей с превалированием резистивных элементов в ней.

УДК 621.311

В. Г. Ягуп, докт. техн. наук
Харківська національна академія міського господарства

Е. В. Ягуп, канд. техн. наук
Українська державна академія залізничного транспорту

ФОРМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РЕЗИСТИВНЫМ ПРЕВАЛИРОВАНИЕМ

Уравнения по методу переменных состояния являются основой для моделирования электротехнических устройств. Целью моделирования является получение информации об электромагнитных и электромеханических процессах. С помощью результатов моделирования определяются основные энергетические показатели электроснабжения и электрические нагрузки на элементы электротехнического устройства. Все это необходимо для проектирования устройств, выбора элементов и конструирования систем управления, контроля и защиты. Основы метода переменных состояния изложены в ряде работ [1 – 4], где формулируются основные положения и методики получения уравнений состояния, в том числе с использованием матричного исчисления. Эти алгоритмы применяются в программах компьютерного моделирования электронных и электротехнических устройств, которые используют приближенные вычислительные методы. В ряде случаев исследователя могут интересовать символьные выражения уравнений состояния, и в этом случае появляются определенные сложности в выводах уравнений состояния, связанные с резистивным превалированием в структуре цепи. Под последним будем понимать наличие достаточно большого количества резистивных элементов в эквивалентной расчетной схеме моделируемой цепи. Вследствие этого коэффициенты уравнений состояния выражаются дробными соотношениями, зависящими от взаимных соотношений сопротивлений, взятыми в числителе и знаменателе различными сочетаниями сумм их произведений. Особенно это характерно для вентильных схем, когда эквивалентная расчетная схема составляется путем кусочно-линейной аппроксимации характерных нелинейных элементов [5]. Другим источником резистивного преобладания в этом случае является преодоление проблемы вырожденности системы, решаемое путем введения так называемых развязывающих резисторов[6]. Это позволяет обеспечивать работоспособность моделей при любых исходных схемах преобразователей, что в ряде случаев является препятствием для запуска моделей SimPowerSystems [7].

В настоящей статье рассматривается методика формирования уравнений состояний электрической системы при наличии резистивного превалирования на основании системного подхода.

Общий принцип формирования уравнений состояния электрической системы состоит в записи топологических и компонентных уравнений системы, из которой и вытекают уравнения состояния. К переменным состояния для электрических систем рационально отнести те электрические величины, которые определяют запас энергии в рассматриваемой системе. В общем случае такими величинами являются заряды конденсаторов и потокосцепления катушек индуктивностей. Для линейных электрических систем к переменных состояния достаточно отнести напряжения на конденсаторах и токи через катушки индуктивностей. Нелинейные электрические цепи рассчитываются путем линеаризации их характеристик в малой окрестности изображающей точки, поэтому последний вариант назначения переменных состояния x представляется следующим образом:

$$X=[V_{C1},V_{C2},\dots,V_{Ck},\, i_{L1},\, i_{L2},\, \dots, i_{Ll}]^{T},$$

где V_{Ci} и i_{Lj} – напряжения на k конденсаторах и токи в l индуктивностях, а символ T означает транспонирование матрицы-строки.

Вводится в обращение также вектор Q задающих величин источников напряжения и тока, питающих систему:

$$Q=[V_{E1},V_{E2},\dots,V_{Em},\, i_{J1},\, i_{J2},\, \dots, i_{Jn}]^{T},$$

где V_{Ei} и i_{Jj} – задающие напряжения и токи источников электрической энергии, количество которых соответственно равно m и n.

При формировании уравнений состояния необходимо полную систему уравнений, состоящую из топологических и компонентных уравнений, преобразовать таким образом, чтобы производные от переменных состояния были выражены через сами переменные состояния и задающие величины. Для линейных электрических систем уравнения состояния могут быть представлены в виде линейного матричного уравнения

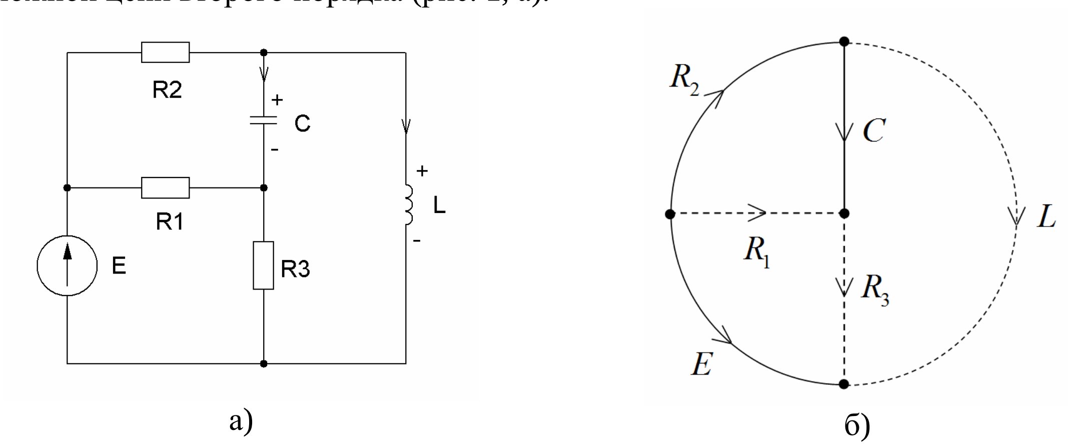
$$\frac{dX}{dt}=AX+BQ,$$

где A – квадратная матрица, называемая системной и выражающая зависимости производных от самих переменных состояния,

B – прямоугольная в общем случае матрица, определяющая количественно влияние источников электрической энергии на производные от переменных состояния.

Основной проблемой при выводе уравнений состояния в символьной форме является исключение резистивных электрических величин. Эта проблема усложняется в случае резистивного преобладания в структуре электрической цепи.

Рассмотрим обозначенную проблему на конкретном примере относительно несложной цепи второго порядка (рис. 1, а).



а) б)

Рис. 1

Схема составлена таким образом, что в предельном случае $R_2 \to \infty$ и $R_3 \to \infty$ схема отображает подключение элементарного последовательного колебательного контура к источнику постоянного напряжения. Нормальное дерево [1, 2], включающее в себя ребра источников напряжения и конденсаторов и не содержащее катушек индуктивностей и источников тока, приведено на рис. 1, б. Из резисторов взят вариант, когда в дерево включен R_2, а резисторы R_1 и R_3 отнесены к связям. Резистивное превалирование проявляется на этапе анализа структуры особых контуров в том, что резистивные связи образуют свое особые контуры, включая в них резистивную ветвь. Это и приводит к усложнению вывода символьных выражений для уравнений по методу переменных состояния.

Топологическая матрица, отражающая структуру особых контуров, имеет вид:

F=

	E	C	R_2
R_1		-1	-1
R_3	-1	+1	+1
L	-1		+1

Топологические уравнения в матричном виде имеют вид:

$$\begin{array}{|c|}\hline V_{R1} \\ \hline V_{R3} \\ \hline V_L \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & +1 & +1 \\ \hline +1 & -1 & -1 \\ \hline +1 & & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline V_E \\ \hline V_C \\ \hline V_{R2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline i_E \\ \hline i_C \\ \hline i_{R2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & -1 \\ \hline -1 & +1 & \\ \hline -1 & +1 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline i_{R1} \\ \hline i_{R3} \\ \hline i_L \\ \hline \end{array}$$

Перемножив матрицы, получим топологические уравнения в скалярном виде:

$$V_{R1} = V_C + V_{R2}; \tag{1}$$

$$V_{R3} = V_E - V_C - V_{R2}; \tag{2}$$

$$V_L = V_E - V_{R2}; \tag{3}$$

$$i_E = -i_{R3} - i_L; \tag{4}$$

$$i_C = -i_{R1} + i_{R3}; \tag{5}$$

$$i_{R2} = -i_{R1} + i_{R3} + i_L; \tag{6}$$

Дополним топологические уравнения компонентами, используя для реактивных элементов форму дифференциальных уравнений

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}; \tag{7}$$

$$V_L = L\frac{di_L}{dt}; \tag{8}$$

А для резисторов – алгебраическую, причем для резистивных ветвей – импедансную форму, а для резистивных связей – адмитансную [8]:

$$i_{R1} = \frac{1}{R_1}V_{R1}; \tag{9}$$

$$V_{R2} = R_2 i_{R2}; \tag{10}$$

$$i_{R3} = \frac{1}{R_3}V_{R3}; \tag{11}$$

Система уравнений (1) – (11) представляет собою полную систему уравнений модели рассматриваемой электрической системы. Для получения уравнений состояния, сопоставив пары уравнений (5) и (7), (3) и (8), получим:

$$C\frac{dV_C}{dt}=-i_{R1}+i_{R3};$$

$$L\frac{di_L}{dt}=V_E-VU_{R2};$$

или:

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{1}{C}(-i_{R1}+i_{R3}); \qquad (12)$$

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{1}{L}(V_E-V_{R2}); \qquad (13)$$

В последних уравнениях из правых частей следует исключить резистивные электрические величины i_{R1}, i_{R3} и V_{R2}.

Для этого воспользуемся теми уравнениями из полной системы, которые еще не задействованы для вывода уравнений состояния. Для резистивных величин:

$$i_{R1}=\frac{1}{R_1}V_{R1}=\frac{1}{R_1}(V_C+V_{R2});$$

$$V_{R2}=R_2 i_{R2}=R_2(-i_{R1}+i_{R3}+i_L);$$

$$i_{R3}=\frac{1}{R_3}V_{R3}=\frac{1}{R_3}(V_E-V_C-V_{R2});$$

Последние три уравнения преобразуем таким образом, чтобы в левых частях фигурировали искомые резистивные величины, а переменные состояния и задающие величины источников расположенные в правых частях уравнений:

$$\begin{aligned} R_1 i_{R1}-V_{R2} &= V_C; \\ R_2 i_{R1}+V_{R2}-R_2 i_{R3} &= R_2 i_L; \\ V_{R2}+R_3 i_{R3} &= V_E-V_C; \end{aligned}$$

В матричной форме эта система имеет вид:

$$\begin{matrix} R_1 & -1 & 0 \\ R_2 & +1 & -R_2 \\ 0 & +1 & R_3 \end{matrix} \times \begin{matrix} i_{R1} \\ V_{R2} \\ i_{R3} \end{matrix} = \begin{matrix} V_C \\ R_2 i_L \\ V_E-V_C \end{matrix}$$

Главный определитель:

$$\Delta = R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3;$$

По правилу Крамера:

$$i_{R1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\det\begin{matrix} V_C & -1 & 0 \\ R_2 i_L & +1 & -R_2 \\ V_E-V_C & +1 & R_3 \end{matrix} = \frac{1}{\Delta}[V_C(R_3+R_2)+R_2R_3i_L+(V_E-V_C)R_2]=$$

$$=\frac{R_3V_C+R_2R_3i_L+R_2V_E}{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3};$$

Аналогично:

$$V_{R2}=\frac{1}{\Delta}\cdot\det\begin{vmatrix} R_1 & V_C & 0 \\ R_2 & R_2 i_L & -R_2 \\ 0 & V_E-V_C & R_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}[-R_2R_3V_C+R_1R_2R_3i_L+R_1R_2(V_E-V_C)]=$$

$$=\frac{-R_2(R_1+R_3)V_C+R_1R_2R_3i_L+R_1R_2V_E}{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3};$$

$$i_{R3}=\frac{1}{\Delta}\cdot\det\begin{vmatrix} R_1 & -1 & V_C \\ R_2 & +1 & R_2 i_L \\ 0 & +1 & V_E-V_C \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}[R_2V_C-R_1R_2i_L+(R_1+R_2)(V_E-V_C)]=$$

$$=\frac{-R_1V_C-R_1R_2i_L+(R_1+R_2)V_E}{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3};$$

Подставим выведенные выражения для разностных величин в уравнения (12) и (13).

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{1}{C}[\frac{-R_1V_C-R_1R_2i_L+(R_1+R_2)V_E-R_3V_C-R_2R_3i_L-R_2V_E}{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3}];$$

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{1}{L}[\frac{-R_2(R_1+R_3)V_C+R_1R_2R_3i_L+R_1R_2V_E}{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3}];$$

Приведя подобные, получим уравнения состояния в следующем виде:

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{1}{C}[\frac{-(R_1+R_3)V_C-R_2(R_1+R_3)i_L+R_1V_E}{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3}];$$

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{1}{L}[\frac{-R_2(R_1+R_3)V_C-R_1R_2R_3i_L+R_3(R_1+R_2)V_E}{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3}];$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dV_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1+R_3}{C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)} & -\dfrac{R_2(R_1+R_3)}{C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)} \\ \dfrac{R_2(R_1+R_3)}{L(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)} & -\dfrac{R_1R_2R_3}{L(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} \dfrac{R_1}{C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)} \\ \dfrac{R_3(R_1+R_2)}{L(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)} \end{bmatrix} \times V_E$$

На рис. 2. Приведен рабочий лист MathCAD, на котором осуществлен расчет переходного процесса по выведенным уравнениям состояния.

Исходные данные и начальные значения

R1 := 1 R2 := 2 R3 := 3 E := 100 _L := 0.01 _C := 0.01

$IL_0 := 0$ $VC_0 := 0$ dlt := 0.0001 t := 0 .. 10000

Системная матрица

$$A := \begin{bmatrix} \dfrac{-R1 - R3}{\_C\cdot(R1\cdot R2 + R1\cdot R3 + R2\cdot R3)} & \dfrac{-R2\cdot(R1 + R3)}{\_C\cdot(R1\cdot R2 + R1\cdot R3 + R2\cdot R3)} \\ \dfrac{R2\cdot(R1 + R3)}{\_L\cdot(R1\cdot R2 + R1\cdot R3 + R2\cdot R3)} & \dfrac{-R1\cdot R2\cdot R3}{\_L\cdot(R1\cdot R2 + R1\cdot R3 + R2\cdot R3)} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} \dfrac{R1}{\_C\cdot(R1\cdot R2 + R1\cdot R3 + R2\cdot R3)} \\ R3\cdot\dfrac{(R1 + R2)}{\_L\cdot(R1\cdot R2 + R1\cdot R3 + R2\cdot R3)} \end{bmatrix}$$

Расчет переменных состояния

$$\begin{pmatrix} VC_{t+1} \\ IL_{t+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} VC_t \\ IL_t \end{pmatrix} + dlt\cdot\left[A\cdot\begin{pmatrix} VC_t \\ IL_t \end{pmatrix} + B\cdot E\right]$$

Рис. 2.

Параметры схемы: $R_1 = 1\ Ом$, $R_2 = 2\ Ом$, $R_3 = 3\ Ом$, $L = 0.01\ Гн$, $C = 0.01\ Ф$

Шаг интегрирования $\Delta t = 0.0001$ взят достаточно малым, поскольку использован метод Эйлера. Как показывают расчеты (рис. 3), процесс приводит к асимптотическим конечным значениям переменных состояния.

$$V_C = -\frac{R_3}{R_1 + R_3}E; \quad i_L = \frac{E}{R_1}$$

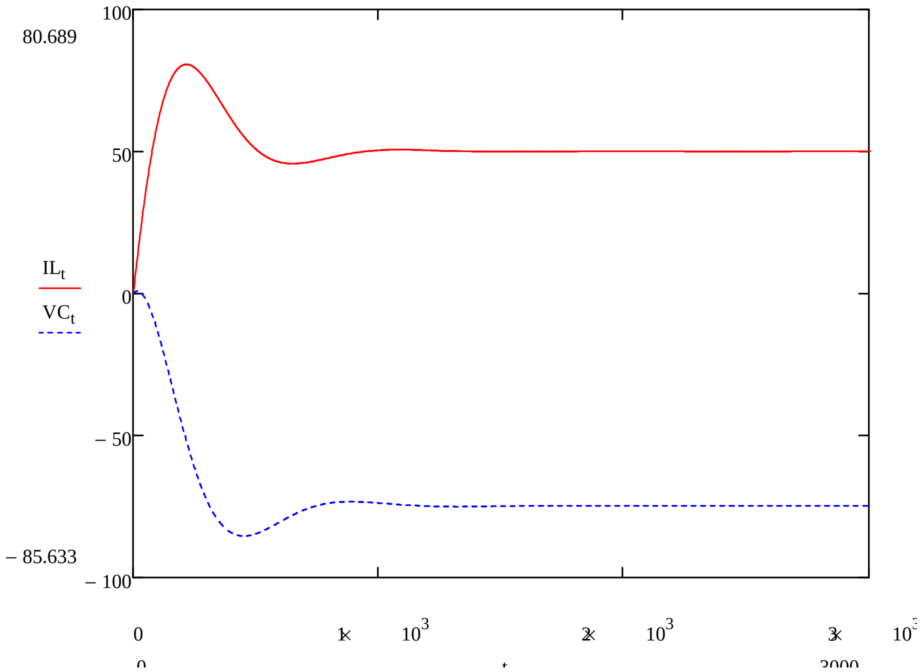


Рис. 3

Выводы. В случае резистивного превалирования вычисление символьных выражений для коэффициентов уравнений состояния может существенно осложняться. Основная вычислительная трудность обусловлена необходимостью решения системы уравнений для резистивных величин. Последние должны быть исключены из первых частей уравнений состояния, для чего их следует выразить через переменные состояния и задающие величины источников.

Список литературы

1. Калахан Д. Методы машинного расчета электронных схем. – М.: Мир, 1970. – 344 с.
2. Ильин В. Н. Машинное проектирование электронных схем. – М.: Энергия, 1972. – 280 с.
3. Сигорский В. П., Петренко А. И. Алгоритмы анализа электронных схем. – М.: Сов. Радио, 1976. – 608 с.
4. Чуа Л. О., Пен-Мин Лин. Машинных анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы). – М.: Энергия, 1980. – 640 с.
5. Ягуп В. Г. Автоматизированный расчет тиристорных схем. – Х.: Вища школа, 1986. – 160 с.
6. Ягуп В. Г. Исследование электромагнитных процессов в преобразователях электроэнергии на основе сигнальных графов (теория, методы, алгоритмы и их компьютерная реализация). – Дисс. на соиск. д. т. н. Киев: ИЭД НАНУ, 1997. – 468 с..
7. Черных И. В. Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink. – М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2008. – 288 с.
8. Мэзон Г., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. – М.: Из-во иностранной литературы, 1963. – 619 с.

ФОРМУВАННЯ РІВНЯНЬ СТАНУ ДЛЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ З РЕЗИСТИВНИМ ПРЕВАЛЮВАННЯМ

В. Г. Ягуп, К. В. Ягуп

Розглянута методика здобуття рівнянь стану за методом змінних для електричних кіл з превалюванням резистивних елементів.

STATE EQUATIONS FORMING FOR ELECTRIC SYSTEMS WITH RESISTANCE PREDOMINATING

V. Yagup, K. Yagup

The method of state variables equations receipt for electric circuit with predominating of resistance elements is considered.